

Machines thermiques

7.6 Cycle moteur de Brayton

★★★★ Un gaz parfait subit quatre processus réversibles formant le cycle moteur de Brayton (fig. 7.1) :

- 1 → 2 compression adiabatique,
- 2 → 3 expansion isobare,
- 3 → 4 détente adiabatique,
- 4 → 1 contraction isobare.

Les pressions p_1 et p_2 ainsi que les volumes V_1 et V_3 sont supposés connus.

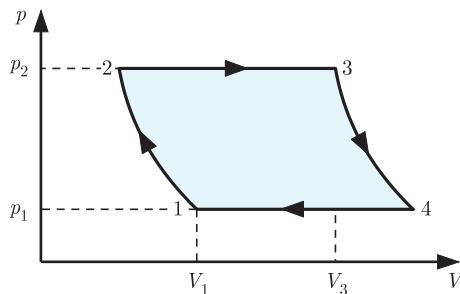


Fig. 7.1 Diagramme (p, V) du cycle moteur de Brayton.

- 1) Déterminer le travail $W_{3 \rightarrow 4}$ réalisé sur l'environnement lors de la détente adiabatique $3 \rightarrow 4$.
- 2) Déterminer la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ fournie au gaz lors de l'expansion isobare $2 \rightarrow 3$.
- 3) Déterminer la variation d'entropie $\Delta S_{4 \rightarrow 1}$ lors de la contraction isobare $4 \rightarrow 1$.
- 4) Esquisser le diagramme (T, S) du cycle.

7.6 Solution

1) Le travail (7.20) réalisé sur l'environnement durant une détente adiabatique s'écrit,

$$W_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4} = c NR \int_{T_3}^{T_4} dT = c NR (T_4 - T_3) < 0$$

Compte tenu de l'équation d'état (5.66) du gaz parfait,

$$p_3 V_3 = NR T_3 \quad \text{et} \quad p_4 V_4 = NR T_4$$

des propriétés des processus isobares,

$$p_3 = p_2 \quad \text{et} \quad p_4 = p_1$$

et de la propriété d'adiabaticité (5.108),

$$p_3 V_3^\gamma = p_4 V_4^\gamma \quad \text{ainsi} \quad V_4 = \left(\frac{p_3}{p_4} \right)^{1/\gamma} V_3 = \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} V_3$$

le travail $W_{3 \rightarrow 4}$ réalisé sur l'environnement est mis sous la forme,

$$W_{3 \rightarrow 4} = c (p_4 V_4 - p_3 V_3) = c (p_1 V_4 - p_2 V_3) = c V_3 \left(p_1 \left(\frac{p_2}{p_1} \right)^{1/\gamma} - p_2 \right)$$

2) La chaleur (7.30) fournie au gaz lors de l'expansion isobare s'écrit,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta H_{2 \rightarrow 3} = (c + 1) NR \int_{T_2}^{T_3} dT = (c + 1) NR (T_3 - T_2) > 0$$

Compte tenu de l'équation d'état (5.66) du gaz parfait,

$$p_2 V_2 = NR T_2 \quad \text{et} \quad p_3 V_3 = NR T_3$$

de la propriété d'isobarité,

$$p_3 = p_2$$

et de la propriété d'adiabaticité (5.108),

$$p_1 V_1^\gamma = p_2 V_2^\gamma \quad \rightarrow \quad V_2 = \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} V_1$$

la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ fournie au gaz est mise sous la forme,

$$\begin{aligned} Q_{2 \rightarrow 3} &= (c + 1) (p_3 V_3 - p_2 V_2) = (c + 1) p_2 (V_3 - V_2) \\ &= (c + 1) p_2 \left(V_3 - \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} V_1 \right) \end{aligned}$$

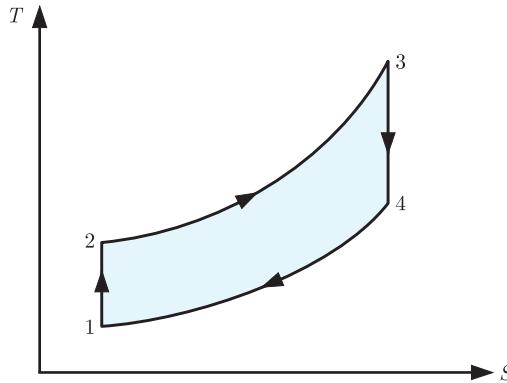


Fig. 7.2 Diagramme (T, S) du cycle moteur de Brayton.

3) D'après la définition (7.33) de la variation d'entropie durant la contraction isobare, de l'équation d'état (5.66) du gaz parfait et de la propriété d'un processus d'adiabacité énoncée précédemment, on obtient,

$$\begin{aligned}\Delta S_{4 \rightarrow 1} &= \int_4^1 \frac{dH}{T} = (c+1) NR \int_{T_4}^{T_1} \frac{dT}{T} = (c+1) NR \ln \left(\frac{T_1}{T_4} \right) \\ &= (c+1) NR \ln \left(\frac{V_1}{V_4} \right) = (c+1) NR \ln \left(\left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{1/\gamma} \frac{V_1}{V_3} \right) < 0\end{aligned}$$

4) La compression adiabatique $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température croissante (fig. 7.2),

$$S = S_1 = S_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T_1 < T_2$$

Compte tenu de la relation (5.99), l'expansion isobare $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (T, S) par une courbe convexe de température croissante et d'entropie croissante,

$$\frac{T_3}{T_2} = \exp \left(\frac{S_3 - S_2}{(c+1) NR} \right) > 1$$

La détente adiabatique $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température décroissante,

$$S = S_3 = S_4 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T_3 > T_4$$

Compte tenu de la relation (5.99), la contraction isobare $4 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (T, S) par une courbe convexe de température décroissante et d'entropie décroissante,

$$\frac{T_1}{T_4} = \exp \left(\frac{S_1 - S_4}{(c+1) NR} \right) < 1$$

7.9 Cycle d’Otto

★★★★ Le cycle d’Otto est un modèle de moteur à combustion qui représente le mode opératoire de la plupart des moteurs à combustion non diesel. Il est constitué de quatre processus lorsque le moteur est modélisé comme un système fermé, et de deux processus isobares supplémentaires lorsque le système est ouvert. Ces deux processus correspondent à l’admission d’air et à l’échappement des gaz. Ainsi, on a,

- $0 \rightarrow 1$ admission isobare d’air,
- $1 \rightarrow 2$ compression adiabatique,
- $2 \rightarrow 3$ compression isochore,
- $3 \rightarrow 4$ détente adiabatique,
- $4 \rightarrow 1$ décompression isochore,
- $1 \rightarrow 0$ échappement isobare des gaz.

Supposer que les processus adiabatiques sont réversibles et que le gaz est un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.78) et le coefficient $\gamma = (c + 1) / c$. Les valeurs suivantes de certaines variables d’état sont supposées connues : la pression p_1 , les volumes $V_1 = V_4$ et $V_2 = V_3$, la température T_3 et le nombre de moles N d’air à l’admission. Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) du cycle en représentant aussi les processus d’admission et d’échappement.
- 2) Esquisser le diagramme (T, S) du cycle sans représenter les processus d’admission et d’échappement.
- 3) Décrire ce que le moteur fait durant chaque processus.
- 4) Expliquer pourquoi un échange d’air avec l’extérieur est nécessaire.
- 5) Sur les diagrammes (p, V) et (T, S) déterminer les relations entre les aires délimitées par les cycles, le travail W et la chaleur Q par cycle.
- 6) Déterminer toutes les variables d’état aux points 1, 2, 3 et 4 du cycle, c’est-à-dire trouver p_2 , p_3 , p_4 , T_2 et T_4 .
- 7) Déterminer le travail W effectué par cycle et la chaleur Q échangée durant un cycle.
- 8) Déterminer le rendement du cycle d’Otto,

$$\eta_O = - \frac{W}{Q^+}$$

où $Q^+ = Q_{2 \rightarrow 3}$.

7.9 Solution

- 1) La compression adiabatique $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe convexe de pression croissante et de volume décroissant (fig. 7.3),

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma > 1$$

La compression isochore $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment vertical de pression croissante,

$$V = V_2 = V_3 = \text{cste} \quad \text{et} \quad p_2 < p_3$$

La détente adiabatique $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe convexe de pression décroissante et de volume croissant,

$$\frac{p_4}{p_3} = \left(\frac{V_3}{V_4} \right)^\gamma < 1$$

La décompression isochore $4 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment vertical de pression décroissante,

$$V = V_4 = V_1 = \text{cste} \quad \text{et} \quad p_4 > p_1$$

2) La compression adiabatique $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température croissante (fig. 7.4),

$$S = S_1 = S_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T_1 < T_2$$

Compte tenu de la relation (5.93), la compression isochore $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (T, S) par une courbe convexe de température croissante et d'entropie croissante,

$$\frac{T_3}{T_2} = \exp \left(\frac{S_3 - S_2}{cNR} \right) > 1$$

La détente adiabatique $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température décroissante,

$$S = S_3 = S_4 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T_3 > T_4$$

Compte tenu de la relation (5.93), la décompression isochore $4 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (T, S) par une courbe convexe de température décroissante et d'entropie décroissante,

$$\frac{T_1}{T_4} = \exp \left(\frac{S_1 - S_4}{cNR} \right) < 1$$

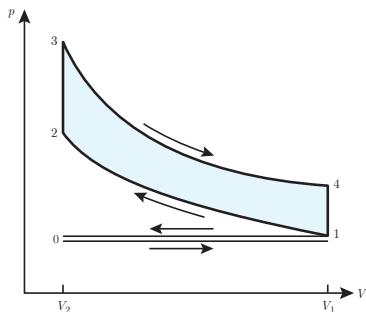


Fig. 7.3 Diagramme (p, V) d'Otto

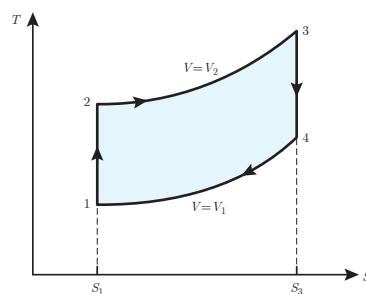


Fig. 7.4 Diagramme (T, S) d'Otto

3) Durant l'admission isobare d'air $0 \rightarrow 1$, une masse d'air est amenée dans le cylindre à pression atmosphérique constante p_1 lorsque le piston se déplace et le volume à l'intérieur du cylindre augmente de V_2 à V_1 . Durant la compression adiabatique $1 \rightarrow 2$, l'air à l'intérieur du cylindre est comprimé adiabatiquement par le piston d'un volume initial V_1 à un volume final V_2 . Durant la compression isochore $2 \rightarrow 3$, le mélange d'air et de carburant est allumé. Durant la détente adiabatique $3 \rightarrow 4$, le gaz subit une détente adiabatique du volume initial V_3 au volume final V_4 , ce qui ramène le piston dans sa position initiale. À cet instant, le gaz occupe un volume V_4 . Durant la décompression isochore $4 \rightarrow 1$, la chaleur est restituée à l'environnement jusqu'à ce que la pression parvienne à nouveau à la pression atmosphérique p_1 . Finalement, durant l'échappement isobare $4 \rightarrow 0$, le gaz est retiré du cylindre à pression atmosphérique constante p_1 sous l'effet du déplacement du piston, ce qui provoque une diminution du volume à l'intérieur du cylindre de V_1 à V_2 .

4) Un moteur qui fonctionne selon le cycle d'Otto est un moteur à combustion. Cela signifie que l'oxygène est essentiel pour que la réaction de combustion chimique puisse avoir lieu. Après chaque allumage, de l'air frais doit entrer dans le cylindre afin de permettre à une nouvelle réaction de combustion d'avoir lieu.

5) L'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (p, V) s'écrit,

$$\oint p dV = \int_{V_1}^{V_2} p dV + \int_{V_3}^{V_4} p dV = -W_{1 \rightarrow 2} - W_{3 \rightarrow 4} = -W > 0$$

étant donné que $W_{2 \rightarrow 3} = W_{4 \rightarrow 1} = 0$. Ainsi, l'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (p, V) représente l'opposé du travail W réalisé par le gaz sur l'environnement durant un cycle. L'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (T, S) s'écrit,

$$\oint T dS = \int_{S_2}^{S_3} T dS + \int_{S_4}^{S_1} T dS = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1} = Q > 0$$

étant donné que $Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{3 \rightarrow 4} = 0$. Ainsi, l'aire délimitée par le cycle dans le diagramme (T, S) représente la chaleur Q échangée par cycle. Comme l'énergie interne U est une fonction d'état, on doit avoir $Q = -W$, en accord avec la relation (7.9).

6) À l'aide de la relation (5.108) et de l'équation d'état du gaz parfait (5.66), les pressions sont données par,

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad p_3 = \frac{N R T_3}{V_2} \quad p_4 = \frac{N R T_3}{V_1} \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

et les températures par,

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{N R} \quad T_2 = \frac{p_1 V_1}{N R} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad T_4 = T_3 \left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1}$$

7) D'après la relation (7.20), les travaux effectués durant la compression et la détente adiabatique s'écrivent,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = c NR \int_{T_1}^{T_2} dT = c NR (T_2 - T_1) > 0$$

$$W_{3 \rightarrow 4} = \Delta U_{3 \rightarrow 4} = c NR \int_{T_3}^{T_4} dT = c NR (T_4 - T_3) < 0$$

Le travail réalisé par le gaz sur l'environnement durant un cycle est donné par,

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} = c NR (T_4 - T_3 + T_2 - T_1) < 0$$

D'après la relation (7.26), les chaleurs échangées durant la compression isochore et la décompression isochore s'écrivent,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \int_{U_2}^{U_3} dU = c NR \int_{T_2}^{T_3} dT = c NR (T_3 - T_2) > 0$$

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} = \int_{U_4}^{U_1} dU = c NR \int_{T_4}^{T_1} dT = c NR (T_1 - T_4) < 0$$

La chaleur fournie au gaz durant un cycle est donnée par,

$$Q = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{4 \rightarrow 1} = c NR (T_3 - T_2 + T_1 - T_4) > 0$$

8) À l'aide de la définition du rendement (7.55), on obtient,

$$\eta_O = - \frac{W}{Q^+} = - \frac{W}{Q_{2 \rightarrow 3}} = - \frac{c (T_4 - T_3 + T_2 - T_1)}{c (T_3 - T_2)} = 1 - \frac{T_4 - T_1}{T_3 - T_2}$$

7.10 Cycle d'Atkinson

★★★★ James Atkinson était un ingénieur anglais qui a conçu plusieurs moteurs à combustion. Le cycle thermodynamique qui porte son nom est une modification du cycle d'Otto conçue pour améliorer son rendement. Le prix à payer pour parvenir à un meilleur rendement est une diminution du travail réalisé par le gaz sur l'environnement durant un cycle. Le cycle idéalisé d'Atkinson est constitué des six processus réversibles suivants :

- 1 → 2 : compression adiabatique,
- 2 → 3 : compression isochore,
- 3 → 4 : expansion isobare,
- 4 → 5 : détente adiabatique,
- 5 → 6 : décompression isochore,
- 6 → 1 : contraction isobare.

On suppose que les processus adiabatiques sont réversibles et que le cycle a lieu sur un gaz parfait qui est caractérisé par,

$$pV = NRT \quad U = cNRT \quad \gamma = \frac{c+1}{c}$$

Les grandeurs physiques suivantes qui caractérisent le cycle sont supposées connues : les volumes V_1, V_2 et V_6 , les pressions p_1 et p_3 , la température T_5 et le nombre de moles N de gaz. Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) du cycle d'Atkinson.
- 2) Déterminer les pressions p_2, p_4, p_5, p_6 , les volumes V_3, V_4, V_5 et les températures T_1, T_2, T_3, T_4, T_6 , en termes des grandeurs physiques connues.
- 3) Déterminer les travaux $W_{1 \rightarrow 2}, W_{2 \rightarrow 3}, W_{3 \rightarrow 4}, W_{4 \rightarrow 5}, W_{5 \rightarrow 6}, W_{6 \rightarrow 1}$ et le travail W effectué par cycle.
- 4) Déterminer les transferts de chaleur $Q_{1 \rightarrow 2}, Q_{2 \rightarrow 3}, Q_{3 \rightarrow 4}, Q_{4 \rightarrow 5}, Q_{5 \rightarrow 6}, Q_{6 \rightarrow 1}$ et la chaleur $Q^+ = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4}$ fournie au gaz.
- 5) Déterminer le rendement du cycle d'Atkinson,

$$\eta_A = -\frac{W}{Q^+}$$

7.10 Solution

- 1) La compression adiabatique $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe convexe de pression croissante et de volume décroissant (fig. 7.5),

$$\frac{p_2}{p_1} = \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma > 1$$

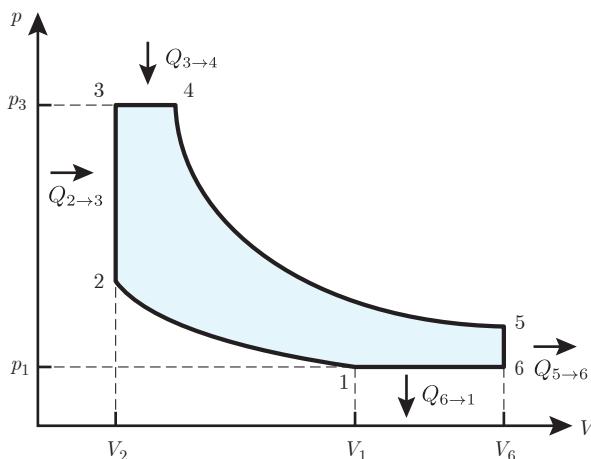


Fig. 7.5 Diagramme (p, V) du cycle d'Atkinson

La compression isochore $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment vertical de pression croissante,

$$V = V_2 = V_3 = \text{cste} \quad \text{et} \quad p_2 < p_3$$

L'expansion isobare $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment horizontal de volume croissant,

$$p = p_3 = p_4 = \text{cste} \quad \text{et} \quad V_2 < V_3$$

La détente adiabatique $4 \rightarrow 5$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe convexe de pression décroissante et de volume croissant,

$$\frac{p_5}{p_4} = \left(\frac{V_4}{V_5} \right)^\gamma < 1$$

La décompression isochore $5 \rightarrow 6$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment vertical de pression décroissante,

$$V = V_5 = V_6 = \text{cste} \quad \text{et} \quad p_5 > p_6$$

La contraction isobare $6 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment horizontal de volume décroissant,

$$p = p_6 = p_1 = \text{cste} \quad \text{et} \quad V_6 > V_1$$

2) À l'aide de la relation (5.108) et de l'équation d'état du gaz parfait (5.66), les pressions sont données par,

$$p_2 = p_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^\gamma \quad p_4 = p_3 \quad p_5 = \frac{N R T_5}{V_6} \quad p_6 = p_1$$

et les volumes par,

$$V_3 = V_2 \quad V_4 = \left(\frac{N R T_5}{p_3} \right)^{\frac{1}{\gamma}} V_6^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} \quad V_5 = V_6$$

Les températures s'écrivent,

$$T_1 = \frac{p_1 V_1}{N R} \quad T_2 = \frac{p_1 V_1}{N R} \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} \quad T_3 = \frac{p_3 V_2}{N R} \\ T_4 = \left(\frac{p_3 V_6}{N R} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} T_5^{\frac{1}{\gamma}} \quad T_6 = \frac{p_1 V_6}{N R}$$

3) D'après la relation (7.20), les travaux effectués durant la compression adiabatique et la détente adiabatique s'écrivent,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} = c N R \int_{T_1}^{T_2} dT = c N R (T_2 - T_1) > 0$$

$$W_{4 \rightarrow 5} = \Delta U_{4 \rightarrow 5} = c N R \int_{T_4}^{T_5} dT = c N R (T_5 - T_4) < 0$$

D'après la relation (7.25), il n'y a pas de travail effectué durant la compression isochore et la décompression isochore,

$$W_{2 \rightarrow 3} = W_{5 \rightarrow 6} = 0$$

D'après la relation (7.29), les travaux effectués durant les processus isobares s'écrivent,

$$\begin{aligned} W_{3 \rightarrow 4} &= - \int_3^4 p \, dV = -p_3 \int_{V_3}^{V_4} dV = -p_3 (V_4 - V_3) \\ &= -NR (T_4 - T_3) < 0 \\ W_{6 \rightarrow 1} &= - \int_6^1 p \, dV = -p_1 \int_{V_6}^{V_1} dV = -p_1 (V_1 - V_6) \\ &= -NR (T_1 - T_6) > 0 \end{aligned}$$

Le travail effectué sur le gaz durant un cycle s'écrit,

$$\begin{aligned} W &= W_{1 \rightarrow 2} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 5} + W_{6 \rightarrow 1} \\ &= cNR (T_2 - T_1 + T_5 - T_4) - NR (T_4 - T_3 + T_1 - T_6) < 0 \end{aligned}$$

4) D'après la relation (7.19), il n'y a pas d'échange de chaleur durant la compression adiabatique et la détente adiabatique,

$$Q_{1 \rightarrow 2} = Q_{4 \rightarrow 5} = 0$$

D'après la relation (7.26), les chaleurs échangées durant la compression isochore et la décompression isochore sont données par,

$$\begin{aligned} Q_{2 \rightarrow 3} &= \Delta U_{2 \rightarrow 3} = \int_{U_2}^{U_3} dU = cNR \int_{T_2}^{T_3} dT = cNR (T_3 - T_2) > 0 \\ Q_{5 \rightarrow 6} &= \Delta U_{5 \rightarrow 6} = \int_{U_5}^{U_6} dU = cNR \int_{T_5}^{T_6} dT = cNR (T_6 - T_5) < 0 \end{aligned}$$

D'après la relation (7.30), les chaleurs échangées durant l'expansion isobare et la contraction isobare s'écrivent,

$$\begin{aligned} Q_{3 \rightarrow 4} &= \Delta H_{3 \rightarrow 4} = \int_{H_3}^{H_4} dH = (c+1)NR \int_{T_3}^{T_4} dT \\ &= (c+1)NR (T_4 - T_3) > 0 \\ Q_{6 \rightarrow 1} &= \Delta H_{6 \rightarrow 1} = \int_{H_6}^{H_1} dH = (c+1)NR \int_{T_6}^{T_1} dT \\ &= (c+1)NR (T_1 - T_6) < 0 \end{aligned}$$

La chaleur fournie par le réservoir chaud s'écrit,

$$Q^+ = Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4} = cNR (T_3 - T_2) + (c+1)NR (T_4 - T_3) > 0$$

5) À l'aide de la définition du rendement (7.55), on obtient,

$$\begin{aligned}\eta_A &= -\frac{W}{Q^+} = -\frac{c(T_2 - T_1 + T_5 - T_4) - (T_4 - T_3 + T_1 - T_6)}{c(T_3 - T_2) + (c+1)(T_4 - T_3)} \\ &= \frac{(T_1 - T_2 + T_4 - T_5) - (\gamma - 1)(T_3 - T_4 + T_6 - T_1)}{(T_3 - T_2) + \gamma(T_4 - T_3)}\end{aligned}$$

7.11 Cycle calorifique

★★★★ Un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.78) et par le coefficient $\gamma = (c+1)/c$ subit un cycle calorifique constitué de quatre processus réversibles (fig. 7.6) :

- $1 \rightarrow 2$: compression adiabatique,
- $2 \rightarrow 3$: contraction isobare,
- $3 \rightarrow 4$: décompression isochore,
- $4 \rightarrow 1$: expansion isobare.

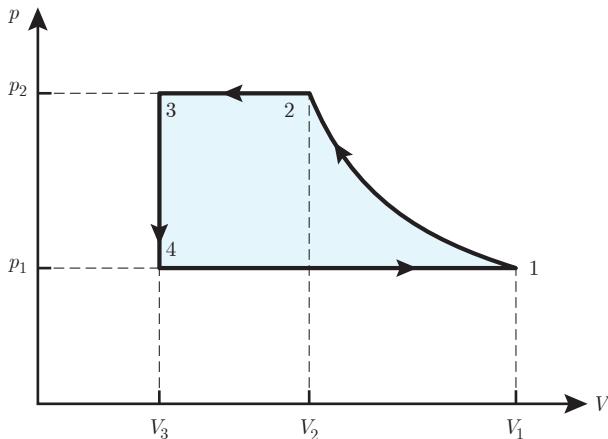


Fig. 7.6 Diagramme (p, V) du cycle calorifique

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Déterminer le volume V_2 en termes du volume V_1 et des pressions p_1 et p_2 .
- 2) Déterminer la variation d'entropie $\Delta S_{2 \rightarrow 3}$ durant la contraction isobare.
- 3) Déterminer la chaleur échangée $Q_{2 \rightarrow 3}$ durant la contraction isobare.
- 4) Supposer à présent qu'au lieu d'un gaz parfait on a utilisé un fluide qui est entièrement dans un état gazeux au point 2 et entièrement dans un état liquide au point 3. La contraction isobare $2 \rightarrow 3$ est alors une transition de phase qui a lieu à la température T et qui est caractérisée par la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$. Déterminer la variation d'entropie

$\Delta S_{2 \rightarrow 3}$ durant la transition de phase en termes du nombre de moles N de fluide, du volume V_2 , de la pression p_2 et de la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$, en supposant que $pV = NRT$ dans la phase gazeuse.

7.11 Solution

1) À l'aide de la condition d'adiabacité (5.108), le volume V_2 s'écrit,

$$V_2 = V_1 \left(\frac{p_1}{p_2} \right)^{\frac{1}{\gamma}}$$

2) D'après la relation (7.33), la variation d'entropie durant la contraction isobare est donnée par,

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = \int_{S_2}^{S_3} dS = (c+1) NR \int_{T_2}^{T_3} \frac{dT}{T} = (c+1) NR \ln \left(\frac{T_3}{T_2} \right) < 0$$

3) D'après la relation (7.30), la chaleur restituée à l'environnement durant la contraction isobare s'écrit,

$$\begin{aligned} Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta H_{2 \rightarrow 3} &= \int_{H_2}^{H_3} dH = (c+1) NR \int_{T_2}^{T_3} dT \\ &= (c+1) NR (T_3 - T_2) < 0 \end{aligned}$$

4) D'après la relation (2.57), la chaleur restituée à l'environnement durant la transition de phase à température T est,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = T \int_{S_2}^{S_3} dS = T (S_3 - S_2) = T \Delta S_{2 \rightarrow 3} < 0$$

D'après les relations (6.62), (6.68) et l'équation d'état du gaz parfait (5.66), on en conclut que,

$$\Delta S_{2 \rightarrow 3} = \frac{Q_{2 \rightarrow 3}}{T} = - \frac{Q_{\ell \rightarrow g}}{T} = - \frac{N \ell_{\ell \rightarrow g}}{T} = - \frac{N^2 R \ell_{\ell \rightarrow g}}{p_2 V_2} < 0$$

7.12 Cycle de Carnot progressif

★★★☆ Un système simple constitué de N moles de gaz parfait monoatomique homogène est contenu dans un cylindre fermé. Durant chaque cycle ditherme, le gaz parfait est mis en contact avec une source chaude fermée, qui est un réservoir à température fixée T^+ , et avec une source froide fermée et rigide qui est constituée de N moles de gaz parfait diatomique homogène. La source froide n'est pas un réservoir de chaleur. Ainsi, la température de la source froide varie d'un cycle au suivant dû au transfert de chaleur avec le système. Toutefois, dans ce modèle, on fait l'approximation que la température de la source froide est constante durant chaque cycle. Cela est le cas si le cycle est suffisamment

petit pour être considéré comme quasiment infinitésimal. Au début du n^e cycle, la température de la source froide est $T^-(n)$. Durant ce cycle, le gaz parfait monoatomique subit les quatre processus réversibles formant le cycle réversible moteur de Carnot (fig. 7.7) :

- $1 \rightarrow 2$ détente isotherme à température T^+ ,
- $2 \rightarrow 3$ détente adiabatique,
- $3 \rightarrow 4$ compression isotherme à température $T^-(n)$,
- $4 \rightarrow 1$ compression adiabatique.

La capacité thermique isochore C_V des N moles de gaz monoatomique dans le système et la capacité thermique isochore $C_V^-(n)$ des N moles de gaz diatomique dans la source froide durant le n^e cycle s'écrivent,

$$C_V = c NR = \frac{3}{2} NR \quad \text{et} \quad C_V^-(n) = c^-(n) NR$$

En raison des degrés de liberté internes aux molécules, la capacité thermique isochore de la source froide change brusquement en fonction de la température. On modélise cela en considérant que durant les $n_0 - 1$ premiers cycles, c'est-à-dire $n < n_0$, le gaz parfait de la source froide est diatomique rigide et que, à partir du n_0^e cycle, c'est-à-dire $n \geq n_0$, il devient diatomique vibrant,

$$c^-(n) = \begin{cases} \frac{5}{2} & \text{si } n < n_0 \\ \frac{7}{2} & \text{si } n \geq n_0 \end{cases}$$

Les grandeurs suivantes sont supposées connues : la température T^+ de la source chaude, la température $T^-(n)$ de la source froide au début du n^e cycle, les volumes V_1 et V_2 , le nombre N de moles de gaz parfait, les nombres de cycles n et n_0 , la constante $c^-(n)$.

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Esquisser qualitativement le diagramme (T, S) du n^e cycle en indiquant les états 1 à 4 et en définissant l'orientation du cycle avec des flèches.
- 2) Déterminer la chaleur $Q^-(n)$ restituée à la source froide à température $T^-(n)$ durant le n^e cycle.
- 3) Déterminer le travail $W(n)$ effectué sur le système durant le n^e cycle.
- 4) Déterminer la variation d'enthalpie $\Delta H_{2 \rightarrow 3}(n)$ du système lors de la détente adiabatique $2 \rightarrow 3$ durant le n^e cycle.
- 5) Montrer que l'accroissement de température $\Delta T^-(n)$ de la température de la source froide lors du n^e cycle s'écrit,

$$\Delta T^-(n) = \lambda(n) T^-(n)$$

et déterminer le coefficient $\lambda(n) > 0$.

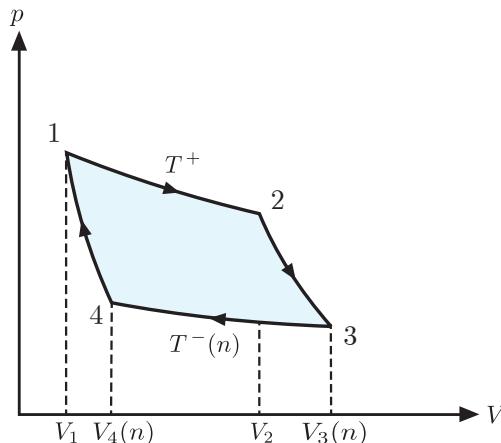


Fig. 7.7 Diagramme (p, V) du n^e cycle de Carnot progressif.

- 6) En déduire les températures de la source froide $T^-(n_0)$ et $T^-(n_1)$ au début des n_0^e et n_1^e cycles, où $n_1 > n_0$, en termes de sa température initiale $T^-(1)$ au début du 1^{er} cycle.
- 7) Durant le 5^e cycle, en supposant $n_0 > 5$, on constate que le rendement $\eta_C(5)$ du moteur fonctionnant selon ce cycle de Carnot progressif a diminué de 20% par rapport au rendement $\eta_C(1)$ durant le 1^{er} cycle. Déterminer le rapport des volumes V_2/V_1 en termes de la température $T^-(1)$ de la source froide au début du 1^{er} cycle. En déduire la température au début du 5^e cycle.

7.12 Solution

- 1) La détente isotherme $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un

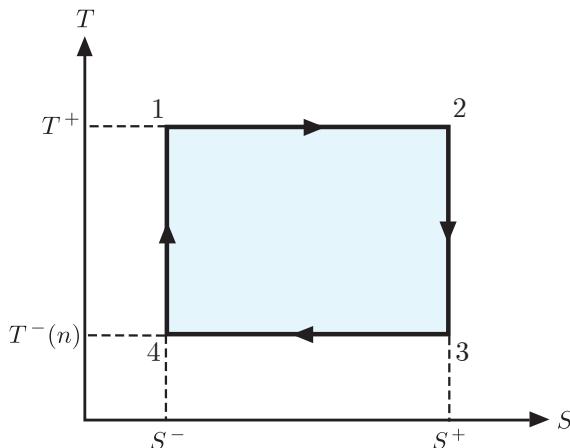


Fig. 7.8 Diagramme (T, S) du n^e cycle de Carnot progressif.

segment horizontal d'entropie croissante (fig. 7.8),

$$T^+ = T_1 = T_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad S^- = S_1 < S_2 = S^+$$

La détente adiabatique $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température décroissante,

$$S^+ = S_2 = S_3 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T^+ = T_2 > T_3 = T^-$$

La compression isotherme $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment horizontal d'entropie décroissante,

$$T^- = T_3 = T_4 = \text{cste} \quad \text{et} \quad S^+ = S_3 > S_4 = S^-$$

La compression adiabatique $4 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (T, S) par un segment vertical de température croissante,

$$S^- = S_4 = S_1 = \text{cste} \quad \text{et} \quad T^- = T_4 < T_1 = T^+$$

2) Durant le n^e cycle, la chaleur $Q^-(n)$ est restituée par le gaz parfait monoatomique à la source froide durant la compression isotherme à température $T^-(n)$,

$$Q^-(n) \equiv Q_{3 \rightarrow 4}(n) = \int_{S_3}^{S_4} T(n) dS(n) = T^-(n) \int_{S^+}^{S^-} dS$$

où $S_3 = S^+$ et $S_4 = S^-$. Durant ce processus, la relation de Gibbs s'écrit,

$$dU = T^-(n) dS - p(n) dV(n) = 0$$

Ainsi, pour le gaz parfait monoatomique durant la compression isotherme,

$$dS = \frac{p(n) dV(n)}{T^-(n)}$$

compte tenu de l'équation d'état,

$$p(n) V(n) = NRT^-(n)$$

la chaleur $Q^-(n)$ restituée à la source froide devient,

$$Q^-(n) = NRT^-(n) \int_{V_3(n)}^{V_4(n)} \frac{dV(n)}{V(n)} = -NRT^-(n) \ln \left(\frac{V_3(n)}{V_4(n)} \right) < 0$$

Durant la détente adiabatique $2 \rightarrow 3$ et la compression adiabatique $4 \rightarrow 1$, les températures et volumes satisfont les identités suivantes,

$$T^+ V_2^{\gamma-1} = T^-(n) V_3^{\gamma-1}(n) \quad \text{et} \quad T^+ V_1^{\gamma-1} = T^-(n) V_4^{\gamma-1}(n)$$

où $T_1 = T_2 = T^+$ et $T_3(n) = T_4(n) = T^-(n)$. Le rapport de ces identités s'écrit,

$$\left(\frac{V_2}{V_1} \right)^{\gamma-1} = \left(\frac{V_3(n)}{V_4(n)} \right)^{\gamma-1}$$

Par conséquent, on en déduit que,

$$\frac{V_2}{V_1} = \frac{V_3(n)}{V_4(n)} > 1$$

Par conséquent, la chaleur $Q^-(n)$ restituée à la source froide devient,

$$Q^-(n) = -NRT^-(n) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) < 0$$

3) La chaleur fournie au système durant la détente isotherme $1 \rightarrow 2$ s'écrit,

$$Q^+ \equiv Q_{1 \rightarrow 2} = NRT^+ \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = NRT^+ \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0$$

Compte tenu du fait que les processus $2 \rightarrow 3$ et $4 \rightarrow 1$ sont adiabatiques, les transferts de chaleur durant ces processus sont nuls,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = 0 \quad \text{et} \quad Q_{4 \rightarrow 1} = 0$$

Par conséquent, compte tenu des chaleurs Q^+ , $Q^-(n)$, $Q_{2 \rightarrow 3}$, $Q_{4 \rightarrow 1}$, la chaleur fournie au système durant le n^e cycle est,

$$\begin{aligned} Q(n) &= Q_{1 \rightarrow 2} + Q_{2 \rightarrow 3} + Q_{3 \rightarrow 4}(n) + Q_{4 \rightarrow 1} = Q^+ + Q^-(n) \\ &= NR \left(T^+ - T^-(n) \right) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0 \end{aligned}$$

D'après le premier principe appliqué au n^e cycle, le travail réalisé sur l'environnement durant le n^e cycle s'écrit,

$$W(n) = \Delta U(n) - Q(n) = -Q(n) = -NR \left(T^+ - T^-(n) \right) \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) < 0$$

4) Compte tenu de la relation de Mayer, la variation d'enthalpie lors de la détente adiabatique $2 \rightarrow 3$ durant le n^e cycle s'écrit,

$$\begin{aligned} \Delta H_{2 \rightarrow 3}(n) &= C_p \left(T_3(n) - T_2 \right) = (C_V + NR) \left(T^-(n) - T^+ \right) \\ &= (c + 1) NR \left(T^-(n) - T^+ \right) = -\frac{5}{2} NR \left(T^+ - T^-(n) \right) < 0 \end{aligned}$$

5) Lors du n^e cycle, la chaleur restituée à la source froide rigide de capacité thermique isochore $C_V^-(n)$ est l'opposé de la chaleur cédée par le gaz monoatomique $Q^-(n)$,

$$-Q^-(n) = C_V^-(n) \Delta T^-(n) > 0$$

Par conséquent, l'accroissement de température $\Delta T^-(n)$ de la source froide s'écrit,

$$\Delta T^-(n) = -\frac{Q^-(n)}{C_V^-(n)} = \frac{NR T^-(n)}{C_V^-(n)} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) = \frac{T^-(n)}{c^-(n)} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0$$

Par conséquent, le coefficient $\lambda(n)$ vaut,

$$\lambda(n) = \frac{1}{c^-(n)} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) > 0$$

6) La température de la source froide au début du n_0^e cycle s'écrit,

$$T^-(n_0) = T^-(n_0 - 1) + \Delta T^-(n_0 - 1) = T^-(n_0 - 1) \left(1 + \lambda(n_0 - 1) \right)$$

Jusqu'au début du n_0^e cycle, le gaz parfait de la source froide est diatomique rigide, c'est-à-dire $c^-(n) = 5/2$. Ainsi, par récurrence, la température de la source froide devient,

$$T^-(n_0) = T^-(1) \prod_{n=1}^{n_0-1} \left(1 + \lambda(n) \right) = T^-(1) \left(1 + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^{n_0-1}$$

Du n_0^e cycle jusqu'au début du n_1^e cycle, le gaz diatomique de la source froide est vibrant, c'est-à-dire $c^-(n) = 7/2$. Ainsi, par récurrence, la température de la source froide devient,

$$T^-(n_1) = T^-(n_0) \prod_{n=n_0}^{n_1-1} \left(1 + \lambda(n) \right) = T^-(n_0) \left(1 + \frac{2}{7} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^{n_1-n_0}$$

En substituant la température $T^-(n_0)$ au début du n_0^e cycle dans la température $T^-(n_1)$ au début du n_1^e cycle, on en conclut que,

$$T^-(n_1) = T^-(1) \left(1 + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^{n_0-1} \left(1 + \frac{2}{7} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^{n_1-n_0}$$

7) Compte tenu de la chaleur $Q^-(n)$ restituée à la source froide, et de la chaleur $Q(n)$ fournie au système ou du travail $Q(n)$ réalisé sur l'environnement durant le n^e cycle, le rendement du moteur de Carnot durant le 5^e cycle s'écrit,

$$\eta_C(5) = - \frac{W(5)}{Q^+} = \frac{Q(5)}{Q^+} = \frac{T^+ - T^-(5)}{T^+}$$

Le rapport des rendements s'écrit,

$$\frac{\eta_C(5)}{\eta_C(1)} = \frac{T^+ - T^-(5)}{T^+ - T^-(1)} = \frac{4}{5}$$

Ainsi, la température $T^-(5)$ s'écrit,

$$T^-(5) = \frac{T^+ + 4T^-(1)}{5}$$

Durant le 5^e cycle, où $n_0 > 5$, le gaz parfait de la source froide est diatomique rigide, c'est-à-dire $c^-(n) = 5/2$. La température évaluée durant le 5^e cycle s'écrit,

$$T^-(5) = T^-(1) \left(1 + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{V_2}{V_1} \right) \right)^4$$

En comparant ces deux relations, on en déduit,

$$\frac{T^+ + 4T^-(1)}{5T^-(1)} = \left(1 + \frac{2}{5} \ln \left(\frac{V_2}{V_1}\right)\right)^4$$

Par conséquent, le rapport des volumes vaut,

$$\frac{V_2}{V_1} = \exp \left(\frac{5}{2} \left(\frac{T^+ + 4T^-(1)}{5T^-(1)} \right)^{1/4} - \frac{5}{2} \right)$$

7.13 Machine de Stirling à deux compartiments

★★★★ Dans une machine Stirling opérant un cycle calorifique, un gaz parfait est enfermé par deux pistons dans un cylindre métallique d'axe horizontal (fig. 7.9).

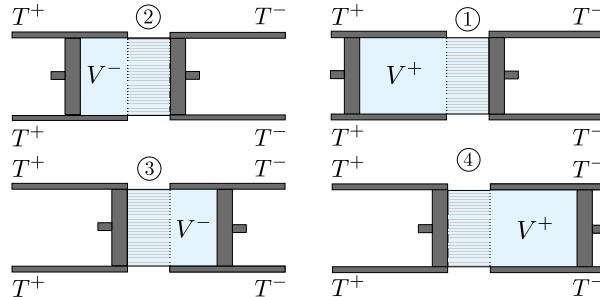


Fig. 7.9 États caractéristiques du cycle calorifique d'une machine de Stirling. Les parois de gauche et de droite sont les sources de chaleur à températures T^+ et T^- . Les surfaces striées représentent la grille séparant les deux compartiments. La grille n'est pas en contact thermique avec l'environnement.

Les parois disjointes du cylindre, représentées en gris foncé, sont les sources de chaleur à température T^+ et T^- . Les deux compartiments dans lesquels

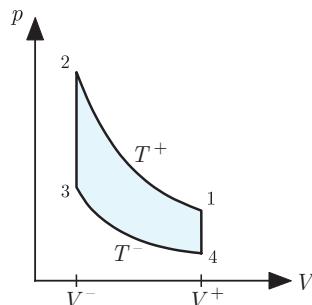


Fig. 7.10 Diagramme (p , V) du cycle de Stirling calorifique pour un gaz parfait.

se trouve le gaz sont séparés par une grille, qui fait office de paroi perméable représentée avec des stries, à travers laquelle passe le gaz lors du mouvement des pistons. Dans les deux compartiments, considérés comme des sous-systèmes simples, le gaz parfait, caractérisé par le coefficient c (5.78), subit un cycle calorifique de Stirling constitué de quatre processus (fig.7.10) :

- $1 \rightarrow 2$: compression isotherme à la température T^+ des parois de gauche ;
- $2 \rightarrow 3$: décompression à travers la grille d'un volume initial V^- à pression constante p_2 à gauche à un volume final V^- à pression constante p_3 à droite ;
- $3 \rightarrow 4$: détente isotherme à la température T^- des parois de droite ;
- $4 \rightarrow 1$: compression à travers la grille d'un volume initial V^+ à pression constante p_4 à droite à un volume final V^+ à pression constante p_1 à gauche.

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Déterminer le travail $W_{2 \rightarrow 3}^+$ effectué par le piston de gauche sur le gaz à pression constante p_2 et le travail $W_{2 \rightarrow 3}^-$ réalisé par le gaz sur le piston de droite à pression constante p_3 lors de la décompression d'un volume initial V^- à gauche à un volume final V^- . En déduire le travail $W_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}^+ + W_{2 \rightarrow 3}^-$ effectué par les pistons sur le gaz et l'exprimer en fonction des températures T^+ et T^- des deux sources de chaleur.
- 2) Déterminer le travail $W_{4 \rightarrow 1}^-$ effectué par le piston de droite sur le gaz à pression constante p_4 et le travail $W_{4 \rightarrow 1}^+$ réalisé par le gaz sur le piston de gauche à pression constante p_1 lors de la compression d'un volume initial V^+ à droite à un volume final V^+ . En déduire le travail $W_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1}^+ + W_{4 \rightarrow 1}^-$ réalisé par le gaz sur les pistons et l'exprimer en fonction des températures T^+ et T^- des deux sources de chaleur.
- 3) Déterminer la variation d'énergie interne $\Delta U_{2 \rightarrow 3}$ durant la décompression et la variation d'énergie interne $\Delta U_{4 \rightarrow 1}$ durant la compression.
- 4) Déterminer la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ fournie au gaz par les sources de chaleur durant la décompression et la chaleur $Q_{4 \rightarrow 1}$ restituée aux sources de chaleur par le gaz durant la compression.
- 5) Montrer que les variations d'enthalpie sont les chaleurs échangées entre les sources de chaleur et le gaz parfait,

$$\Delta H_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} \quad \text{et} \quad \Delta H_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1}$$

7.13 Solution

- 1) Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait évaluée aux états 2 et 3,

$$p_2 V^- = N R T^+ \quad \text{et} \quad p_3 V^- = N R T^-$$

le travail $W_{2 \rightarrow 3}^+$ effectué par le piston de gauche sur le gaz à pression constante p_2 d'un volume initial V^- à un volume final 0 s'écrit,

$$W_{2 \rightarrow 3}^+ = -p_2 \int_{V^-}^0 dV = p_2 V^- = N R T^+$$

et le travail $W_{4 \rightarrow 1}^+$ réalisé par le gaz sur le piston de droite à pression constante p_3 d'un volume initial 0 à un volume final V^- est,

$$W_{2 \rightarrow 3}^- = -p_3 \int_0^{V^-} dV = -p_3 V^- = -NRT^-$$

Par conséquent, le travail effectué par les pistons sur le gaz durant la décompression $2 \rightarrow 3$ s'écrit,

$$W_{2 \rightarrow 3} = W_{2 \rightarrow 3}^+ + W_{2 \rightarrow 3}^- = NR(T^+ - T^-) > 0$$

2) Compte tenu de l'équation d'état du gaz parfait évalué aux états 4 et 1,

$$p_4 V^+ = NRT^- \quad \text{et} \quad p_1 V^+ = NRT^+$$

le travail $W_{4 \rightarrow 1}^-$ effectué par le piston de droite sur le gaz à pression constante p_4 d'un volume initial V^+ à un volume final 0 est,

$$W_{4 \rightarrow 1}^- = -p_4 \int_{V^+}^0 dV = p_4 V^+ = NRT^-$$

le travail $W_{4 \rightarrow 1}^+$ réalisé par le gaz sur le piston de gauche à pression constante p_1 d'un volume initial 0 à un volume final V^+ s'écrit,

$$W_{4 \rightarrow 1}^+ = -p_1 \int_0^{V^+} dV = -p_1 V^+ = -NRT^+$$

Par conséquent, le travail réalisé par le gaz sur les pistons durant la compression $4 \rightarrow 1$ est,

$$W_{4 \rightarrow 1} = W_{4 \rightarrow 1}^- + W_{4 \rightarrow 1}^+ = -NR(T^+ - T^-) < 0$$

Ainsi,

$$W_{4 \rightarrow 1} = -W_{2 \rightarrow 3}$$

3) Les variations d'énergie interne du gaz parfait (5.78) durant la décompression $2 \rightarrow 3$ et la compression $4 \rightarrow 1$ s'écritent,

$$\Delta U_{2 \rightarrow 3} = -cNR(T^+ - T^-) < 0$$

$$\Delta U_{4 \rightarrow 1} = cNR(T^+ - T^-) > 0$$

4) D'après le premier principe, la chaleur $Q_{2 \rightarrow 3}$ fournie au gaz par les sources de chaleur durant la décompression et la chaleur $Q_{4 \rightarrow 1}$ restituée aux sources de chaleur par le gaz durant la compression s'écritent,

$$Q_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} - W_{2 \rightarrow 3} = - (c + 1)NR(T^+ - T^-) < 0$$

$$Q_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} - W_{4 \rightarrow 1} = (c + 1)NR(T^+ - T^-) > 0$$

5) Les variations d'enthalpie (5.86) durant la décompression $2 \rightarrow 3$ et la compression $4 \rightarrow 1$ s'écritent,

$$\Delta H_{2 \rightarrow 3} = - (c + 1)NR(T^+ - T^-) < 0$$

$$\Delta H_{4 \rightarrow 1} = (c + 1)NR(T^+ - T^-) > 0$$

Par conséquent,

$$\Delta H_{2 \rightarrow 3} = Q_{2 \rightarrow 3} \quad \text{et} \quad \Delta H_{4 \rightarrow 1} = Q_{4 \rightarrow 1}$$

7.14 Cycle de Rankine

★★★★ Un gaz parfait caractérisé par le coefficient c (5.78) et par le coefficient $\gamma = (c + 1) / c$ subit un cycle moteur de Rankine constitué de quatre processus réversibles :

- $1 \rightarrow 2$: expansion isobare,
- $2 \rightarrow 3$: détente adiabatique,
- $3 \rightarrow 4$: contraction isobare,
- $4 \rightarrow 1$: compression adiabatique.

Ainsi, le cycle est représenté par un rectangle dans un diagramme (p, S) (fig. 7.11).

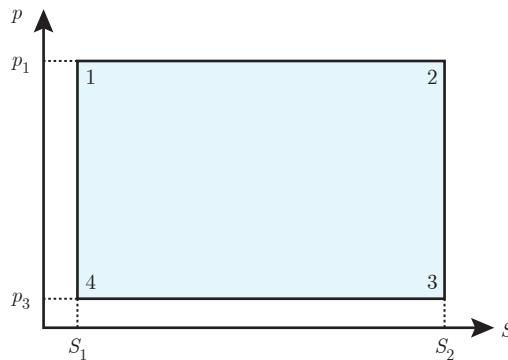


Fig. 7.11 Diagramme (p, S) d'un cycle de Rankine pour un gaz parfait.

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Esquisser le diagramme (p, V) du cycle de Rankine pour un gaz parfait.
- 2) Déterminer les travaux effectués $W_{1 \rightarrow 2}$, $W_{2 \rightarrow 3}$, $W_{3 \rightarrow 4}$ et $W_{4 \rightarrow 1}$ et le travail effectué durant un cycle W en termes des enthalpies H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .
- 3) Déterminer la chaleur fournie au réservoir chaud $Q^+ = Q_{1 \rightarrow 2}$ en termes des enthalpies H_1 , H_2 , H_3 et H_4 .
- 4) Déterminer le rendement du cycle de Rankine pour un fluide parfait défini comme,

$$\eta_R = - \frac{W}{Q^+}$$

7.14 Solution

- 1) L'expansion isobare $1 \rightarrow 2$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment horizontal de volume croissant (fig. 7.12),

$$p = p_1 = p_2 = \text{cste} \quad \text{et} \quad V_1 < V_2$$

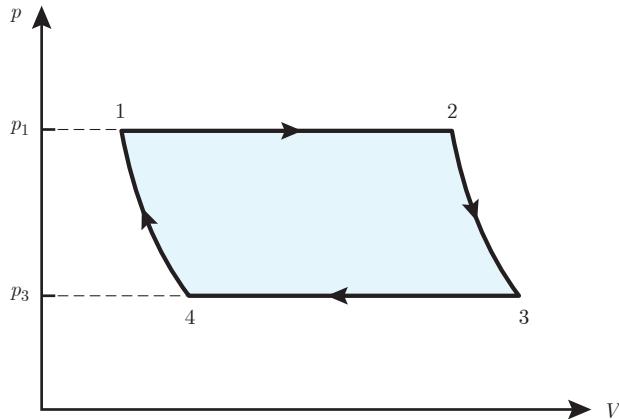


Fig. 7.12 Diagramme (p, V) d'un cycle de Rankine.

La détente adiabatique $2 \rightarrow 3$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe concave de pression décroissante et de volume croissant,

$$\frac{p_3}{p_2} = \left(\frac{V_2}{V_3} \right)^\gamma < 1$$

La contraction isobare $3 \rightarrow 4$ est représentée sur le diagramme (p, V) par un segment horizontal de volume décroissant,

$$p = p_3 = p_4 = \text{cste} \quad \text{et} \quad V_3 > V_4$$

La compression adiabatique $4 \rightarrow 1$ est représentée sur le diagramme (p, V) par une courbe concave de pression croissante et de volume décroissant,

$$\frac{p_1}{p_4} = \left(\frac{V_4}{V_1} \right)^\gamma > 1$$

2) D'après la relation (7.29), les travaux effectués durant l'expansion isobare et la contraction isobare sont donnés par,

$$\begin{aligned} W_{1 \rightarrow 2} &= - \int_1^2 p dV = - p \int_{V_1}^{V_2} dV = - p (V_2 - V_1) \\ &= - NR (T_2 - T_1) < 0 \\ W_{3 \rightarrow 4} &= - \int_3^4 p dV = - p \int_{V_3}^{V_4} dV = - p (V_4 - V_3) \\ &= - NR (T_4 - T_3) > 0 \end{aligned}$$

D'après la relation (5.86), ces travaux peuvent être exprimés en fonction des enthalpies comme,

$$W_{1 \rightarrow 2} = \frac{1}{c+1} (H_1 - H_2) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_1 - H_2)$$

$$W_{3 \rightarrow 4} = \frac{1}{c+1} (H_3 - H_4) = \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_3 - H_4)$$

D'après la relation (7.20), les travaux effectués durant la détente adiabatique et la compression adiabatique sont donnés par,

$$W_{2 \rightarrow 3} = \Delta U_{2 \rightarrow 3} = cNR \int_{T_2}^{T_3} dT = cNR(T_3 - T_2) < 0$$

$$W_{4 \rightarrow 1} = \Delta U_{4 \rightarrow 1} = cNR \int_{T_2}^{T_3} dT = cNR(T_1 - T_4) > 0$$

D'après la relation (5.86), ces travaux peuvent être exprimés en fonction des enthalpies comme,

$$W_{2 \rightarrow 3} = \frac{c}{c+1} (H_3 - H_2) = \frac{1}{\gamma} (H_3 - H_2)$$

$$W_{4 \rightarrow 1} = \frac{c}{c+1} (H_1 - H_4) = \frac{1}{\gamma} (H_1 - H_4)$$

Le travail effectué durant un cycle est donné par,

$$W = W_{1 \rightarrow 2} + W_{2 \rightarrow 3} + W_{3 \rightarrow 4} + W_{4 \rightarrow 1}$$

$$= \frac{\gamma - 1}{\gamma} (H_1 - H_2 + H_3 - H_4) + \frac{1}{\gamma} (H_3 - H_2 + H_1 - H_4)$$

$$= H_1 - H_2 + H_3 - H_4$$

3) D'après la relation (7.30), la chaleur fournie au gaz durant la détente isobare est donnée par,

$$Q^+ = Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta H_{1 \rightarrow 2} = H_2 - H_1$$

4) À l'aide de la définition (7.55) du rendement, on obtient le rendement du cycle,

$$\eta_R = -\frac{W}{Q^+} = -\frac{W}{Q_{1 \rightarrow 2}} = -\frac{H_1 - H_2 + H_3 - H_4}{H_2 - H_1} = 1 - \frac{H_3 - H_4}{H_2 - H_1}$$

7.17 Cycle de Stirling pour un fluide biphasique

★★★★ Un fluide de van der Waals constitué de N moles est contenu dans un cylindre fermé. Le cycle moteur de Stirling que subit le fluide biphasique est formé de quatre processus :

- $1 \rightarrow 2$ détente isotherme réversible à température T^+ ,
- $2 \rightarrow 3$ décompression isochore réversible à volume V^+ ,
- $3 \rightarrow 4$ condensation à température T^- et pression p^- ,
- $4 \rightarrow 1$ compression isochore réversible à volume V^- .

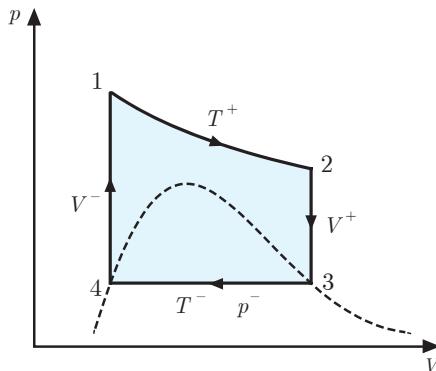


Fig. 7.13 Diagramme (p, V) du cycle moteur de Stirling pour un fluide biphasique.

La courbe de saturation est représentée en traitillé. Les valeurs suivantes de certaines fonctions d'état et paramètres sont supposées connues : la température T^+ de la source chaude, la température T^- de la source froide, les volumes V^+ et V^- , le nombre N de moles et la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$ (fig. 7.13).

Analyser ce cycle en utilisant les instructions suivantes.

- 1) Déterminer la variation de pression Δp du fluide de van der Waals durant un cycle.
- 2) Déterminer la chaleur $Q_{1 \rightarrow 2}$ fournie au fluide de van der Waals durant la détente isotherme.
- 3) Déterminer la variation d'énergie libre $\Delta F_{1 \rightarrow 2}$ du fluide de van der Waals durant la détente isotherme.
- 4) Déterminer la variation de l'enthalpie $\Delta H_{2 \rightarrow 3}$ du fluide de van der Waals durant la décompression isochore en précisant son signe.
- 5) Exprimer la variation d'enthalpie $\Delta H_{3 \rightarrow 4}$ du fluide de van der Waals durant la condensation, qui est une transition de phase à pression constante p^- ayant lieu lorsque le fluide est en contact avec un réservoir de travail, en termes de la chaleur latente molaire de vaporisation $\ell_{\ell \rightarrow g}$ en précisant son signe.
- 6) Déterminer la variation d'entropie $\Delta S_{4 \rightarrow 1}$ du fluide de van der Waals durant la compression isochore en précisant son signe.
- 7) Déterminer la variation d'énergie de Gibbs $\Delta G_{3 \rightarrow 4}$ durant la condensation dans le cas particulier où les potentiels chimiques du gaz et du liquide s'écrivent $\mu_g = \mu_0 (N_g - N_\ell)$ et $\mu_\ell = \mu_0 (N_\ell - N_g)$ où N_g et N_ℓ sont les nombres de moles de gaz et de liquide de van der Waals et $\mu_0 = \text{cste} > 0$.

7.17 Solution

- 1) Comme la pression est une fonction d'état, sa variation sur un cycle est

nulle,

$$\begin{aligned}\Delta p &= \Delta p_{1 \rightarrow 2} + \Delta p_{2 \rightarrow 3} + \Delta p_{3 \rightarrow 4} + \Delta p_{4 \rightarrow 1} \\ &= p_2 - p_1 + p_3 - p_2 + p_4 - p_3 + p_1 - p_4 = 0\end{aligned}$$

2) Compte tenu de l'équation d'état du fluide de van der Waals (6.103), le travail durant la détente isotherme à température T^+ s'écrit,

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \int_1^2 p dV = - NRT^+ \int_{V^-}^{V^+} \frac{dV}{V - Nb} + N^2a \int_{V^-}^{V^+} \frac{dV}{V^2}$$

Le résultat de cette intégrale est,

$$W_{1 \rightarrow 2} = - NRT^+ \ln \left(\frac{V^+ - Nb}{V^- - Nb} \right) + N^2a \left(\frac{1}{V^-} - \frac{1}{V^+} \right)$$

La variation d'énergie interne du fluide de van der Waals (6.118) durant la détente isotherme s'écrit,

$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = U_2 - U_1 = N^2a \left(\frac{1}{V^-} - \frac{1}{V^+} \right)$$

En appliquant le premier principe pour un système fermé (1.65) compte tenu du travail $W_{1 \rightarrow 2}$ et de la variation d'énergie interne $\Delta U_{1 \rightarrow 2}$, la chaleur fournie au gaz durant la contraction isotherme s'écrit,

$$Q_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} = NRT^+ \ln \left(\frac{V^+ - Nb}{V^- - Nb} \right) > 0$$

3) La différentielle de l'énergie libre (4.23) s'écrit,

$$dF = dU - T^+ dS = dU - \delta Q$$

Par intégration de la différentielle de l'énergie libre dF de l'état initial 1 à l'état final 2, on obtient la variation de l'énergie libre durant la détente isotherme réversible,

$$\Delta F_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} - Q_{1 \rightarrow 2} = W_{1 \rightarrow 2}$$

Compte tenu de la variation d'énergie interne $\Delta U_{1 \rightarrow 2}$, de la chaleur $Q_{1 \rightarrow 2}$ ou du travail $W_{1 \rightarrow 2}$, la variation d'énergie libre durant la détente isotherme s'écrit,

$$\Delta F_{1 \rightarrow 2} = \Delta U_{1 \rightarrow 2} - Q_{1 \rightarrow 2} = N^2a \left(\frac{1}{V^-} - \frac{1}{V^+} \right) - NRT^+ \ln \left(\frac{V^+ - Nb}{V^- - Nb} \right)$$

4) Compte tenu de l'énergie interne du fluide de van der Waals (6.116), son enthalpie (4.29) s'écrit,

$$H = U + pV = cNRT - \frac{N^2a}{V} + \frac{NRTV}{V - Nb} - \frac{N^2a}{V}$$

qui est remis sous la forme,

$$H = (c + 1) NRT + \frac{N^2 b RT}{V - Nb} - \frac{2 N^2 a}{V}$$

ou de manière équivalente,

$$H = \left((c + 1) + \frac{N b}{V - Nb} \right) NRT - \frac{2 N^2 a}{V}$$

La variation d'enthalpie s'écrit,

$$\Delta H_{2 \rightarrow 3} = H_3 - H_2 = - \left((c + 1) + \frac{N b}{V^+ - Nb} \right) NR (T^+ - T^-) < 0$$

5) Compte tenu du premier principe (1.59) pour un système fermé, la différentielle de l'enthalpie s'écrit,

$$dH = dU + p^- dV = \delta Q + \delta W + p^- dV$$

Comme la déformation durant la transition de phase est réversible, le travail infinitésimal (2.43) s'écrit,

$$\delta W = - p^- dV$$

Compte tenu du travail infinitésimal δW , la différentielle de l'enthalpie se réduit à la chaleur infinitésimale,

$$dH = \delta Q$$

Par intégration de la différentielle de l'enthalpie dH de l'état initial 3 à l'état final 4, on obtient la variation de l'enthalpie durant la condensation,

$$\Delta H_{3 \rightarrow 4} = Q_{3 \rightarrow 4}$$

La chaleur $Q^- \equiv Q_{3 \rightarrow 4}$ restituée à la source froide par les N moles de gaz de van der Waals durant la condensation est l'opposé de la chaleur fournie aux N moles de liquide de van der Waals durant la vaporisation Q_{43} ,

$$Q^- \equiv Q_{3 \rightarrow 4} = - Q_{4 \rightarrow 3} = - N \ell_{\ell \rightarrow g}$$

Compte tenu de la chaleur $Q_{3 \rightarrow 4}$ restituée par le gaz de van der Waals, la variation de l'enthalpie durant la condensation devient,

$$\Delta H_{3 \rightarrow 4} = - N \ell_{\ell \rightarrow g} < 0$$

6) La relation de Gibbs s'écrit,

$$dU = T dS - p dV$$

On tire de la relation de Gibbs la différentielle de l'entropie,

$$dS = \frac{dU}{T} - \frac{p}{T} dV = c NR \frac{dT}{T} + \left(\frac{2 N^2 a}{V^2 T} - \frac{NR}{V - Nb} \right) dV$$

Durant la compression isochore, le volume V^- est constant. Par intégration de la différentielle de l'entropie dS de l'état initial 4 à l'état final 1, on obtient la variation d'entropie durant la compression isochore réversible,

$$\Delta S_{4 \rightarrow 1} = \int_{T^-}^{T^+} c N R \frac{dT}{T} = c N R \ln \left(\frac{T^+}{T^-} \right) > 0$$

7) La différentielle de l'énergie libre de Gibbs (4.40) à température et pression constantes s'écrit,

$$dG = \mu_\ell dN_\ell + \mu_g dN_g$$

Comme le système est fermé, le nombre de moles N de fluide est constant,

$$N = N_\ell + N_g \quad \text{ainsi} \quad N_g - N_\ell = N - 2 N_\ell \quad \text{et} \quad N_\ell - N_g = 2 N_\ell - N$$

et les potentiels chimiques deviennent,

$$\mu_g = \mu_0 (N - 2 N_\ell) \quad \text{ainsi} \quad \mu_\ell = -\mu_0 (N - 2 N_\ell)$$

De plus, les différentielles des nombres de moles s'écrivent,

$$dN = dN_\ell + dN_g = 0 \quad \text{ainsi} \quad dN_g = -dN_\ell$$

Durant la condensation, la pression p^- et la température T^- sont des constantes. Par intégration de la différentielle de l'énergie libre de Gibbs dG de l'état initial 3 à l'état final 4, compte tenu des potentiels chimiques μ_g et μ_ℓ , et des différentielles de quantité de fluide dN_ℓ et dN_g , on obtient la variation d'énergie libre de Gibbs durant la condensation,

$$\begin{aligned} \Delta G_{3 \rightarrow 4} &= \int_0^N (\mu_\ell - \mu_g) dN_\ell = - \int_0^N 2 \mu_0 (N - 2 N_\ell) dN_\ell \\ &= -2 \mu_0 N \int_0^N dN_\ell + 4 \mu_0 \int_0^N N_\ell dN_\ell = 0 \end{aligned}$$

Avec ce modèle de potentiels chimiques opposés, la diminution de l'énergie libre de Gibbs du gaz de van der Waals compense l'augmentation de l'énergie libre de Gibbs du liquide de van der Waals durant la condensation.